Profesor:
Jonathan Cumpa Velásquez

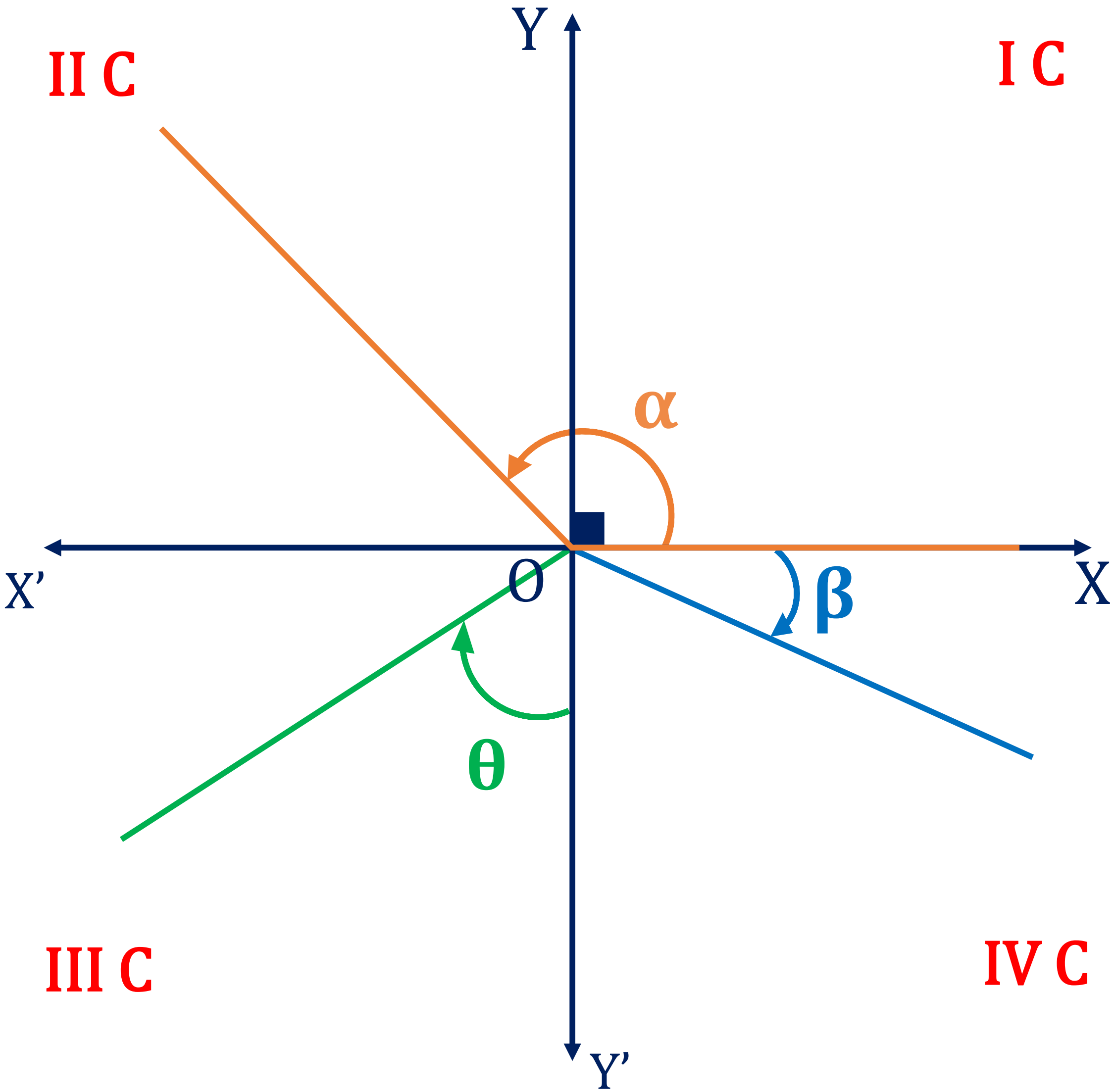
TRIGONOMETRÍA

GRUPO PITÁGORAS

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

RT DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN ESTÁNDAR

1.-Ángulo en posición estándar:



- α es un ángulo en posición estándar

  $\alpha \in IIC \quad , \quad m\measuredangle\alpha > 0$

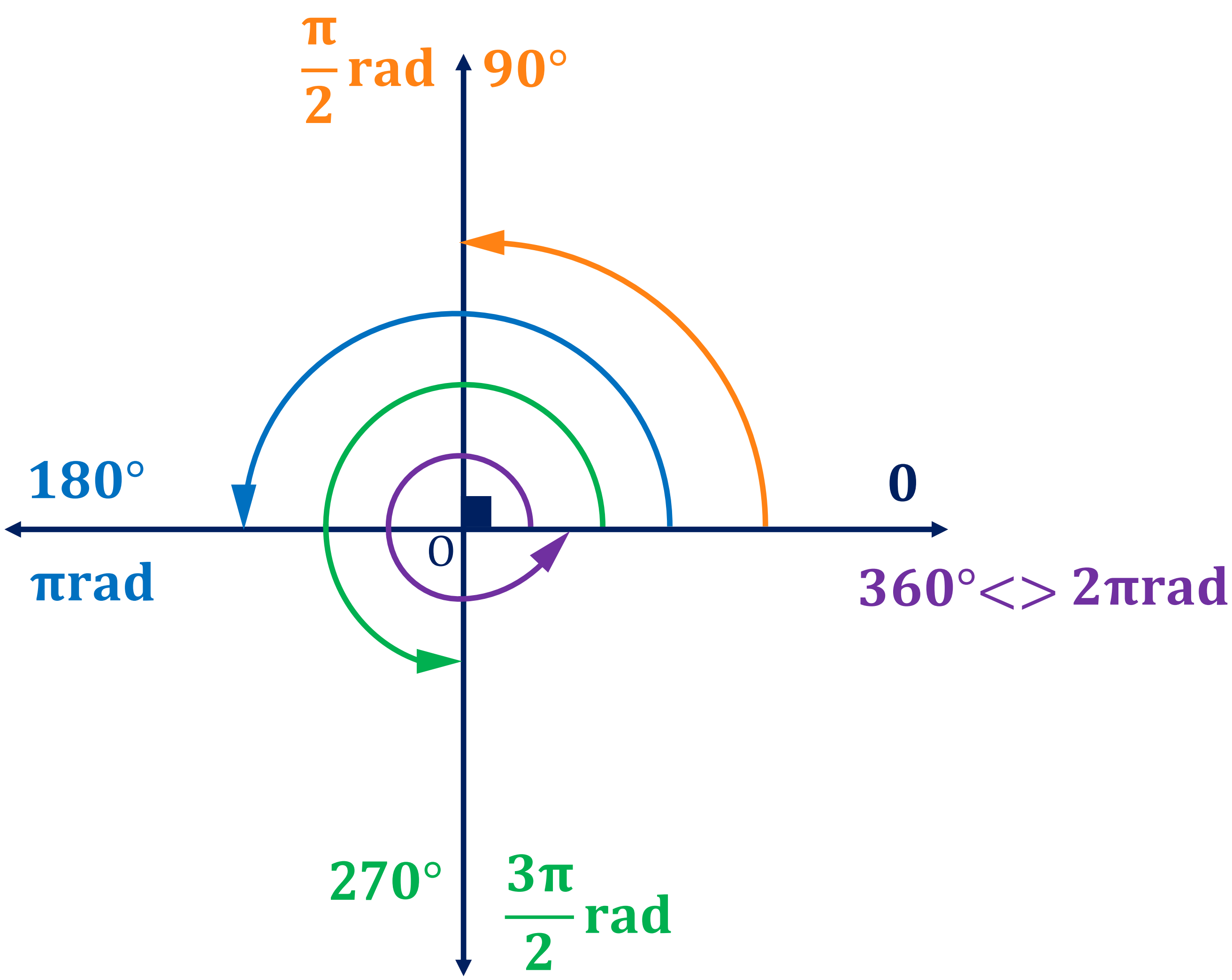
- β es un ángulo en posición estándar

  $\beta \in IVC \quad , \quad m\measuredangle\beta < 0$

- θ: no es un ángulo en posición estándar

RT DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN ESTÁNDAR

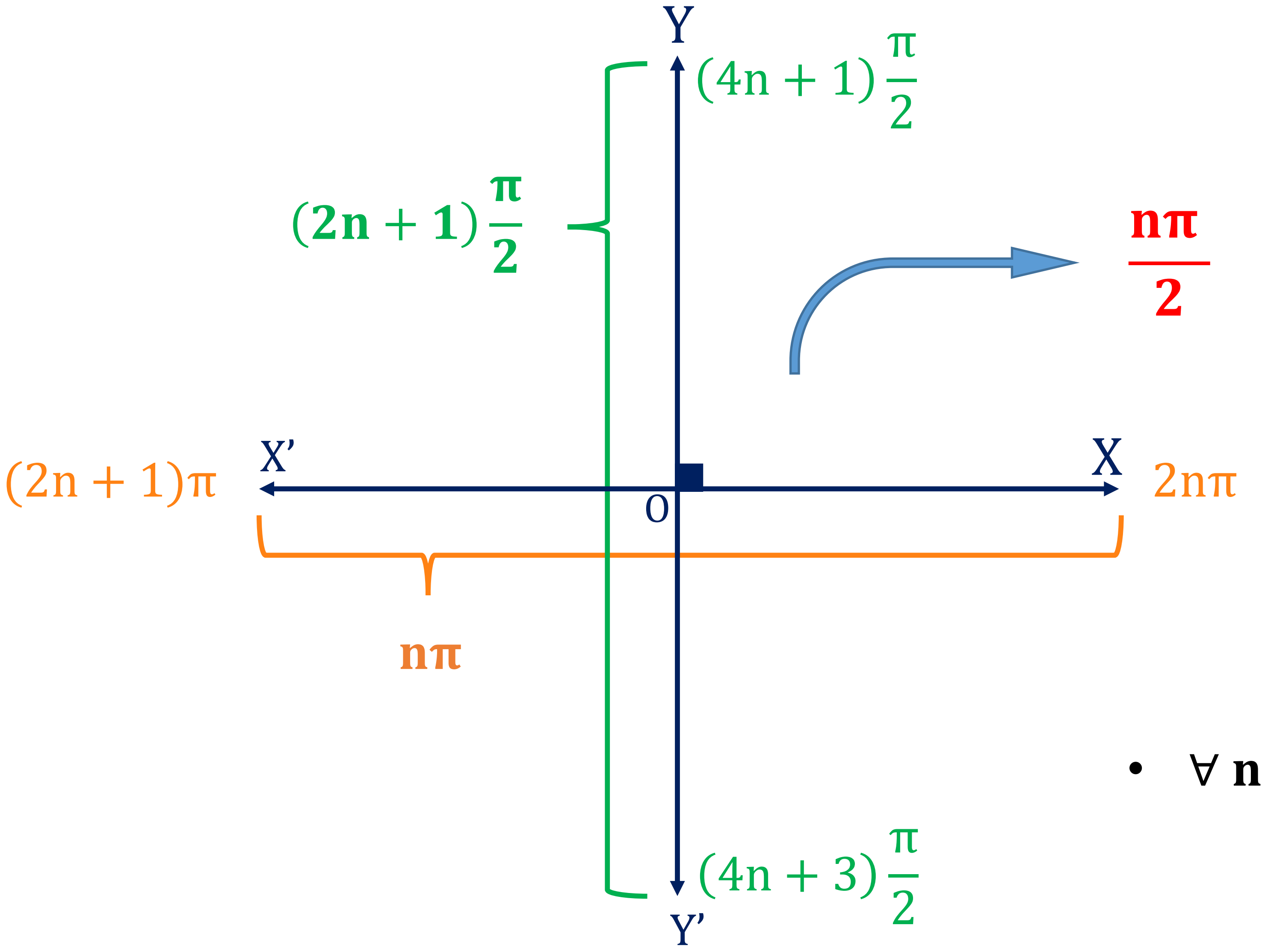
2.-Ángulo cuadrantal:



Múltiplo de $90n°$ ∨ $\frac{n\pi}{2}$rad

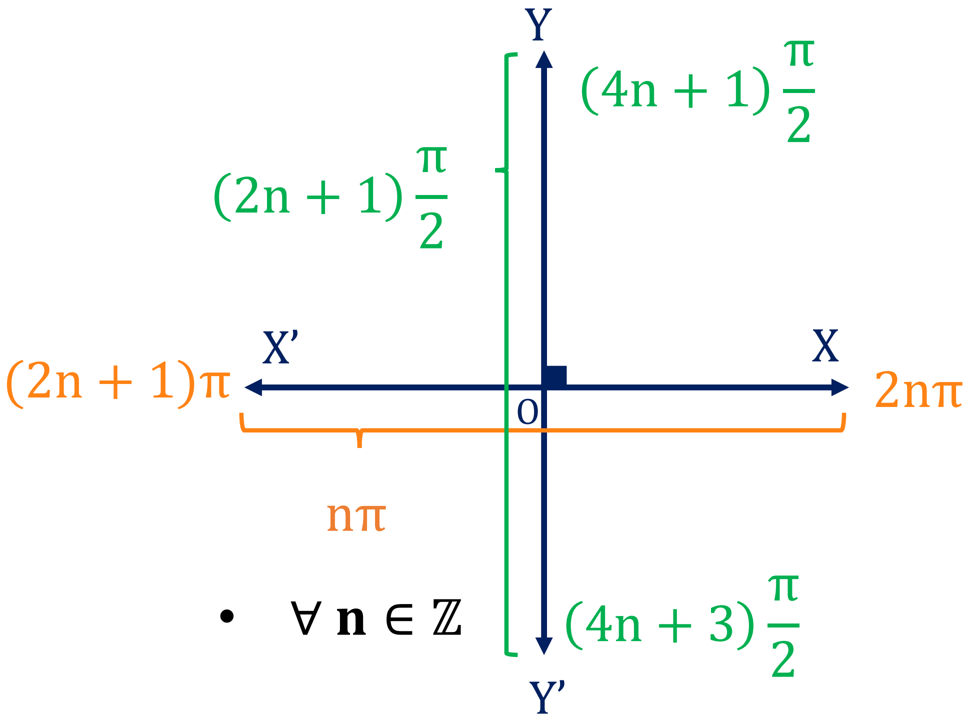
- $\forall\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}$

2.1- Forma general de los ángulos cuadrantales:



- $\forall\ n \in \mathbb{Z}$

RT DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN ESTÁNDAR



- $\forall\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}$

$\overrightarrow{OX}: \{2n\pi;\ \forall\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}\}$

$\overrightarrow{OX'}: \{(2n+1)\pi;\ \forall\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}\}$

$\overrightarrow{OY}: \left\{\frac{(4n+1)\pi}{2};\ \forall\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}\right\}$

$\overrightarrow{OY'}: \left\{\frac{(4n+3)\pi}{2};\ \forall\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}\right\}$

$\overleftrightarrow{X'X}: \{\mathbf{n\pi};\ \forall\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}\}$

$\overleftrightarrow{Y'Y}: \left\{\frac{(\mathbf{2n+1})\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}};\ \forall\ \mathbf{n} \in \mathbb{Z}\right\}$

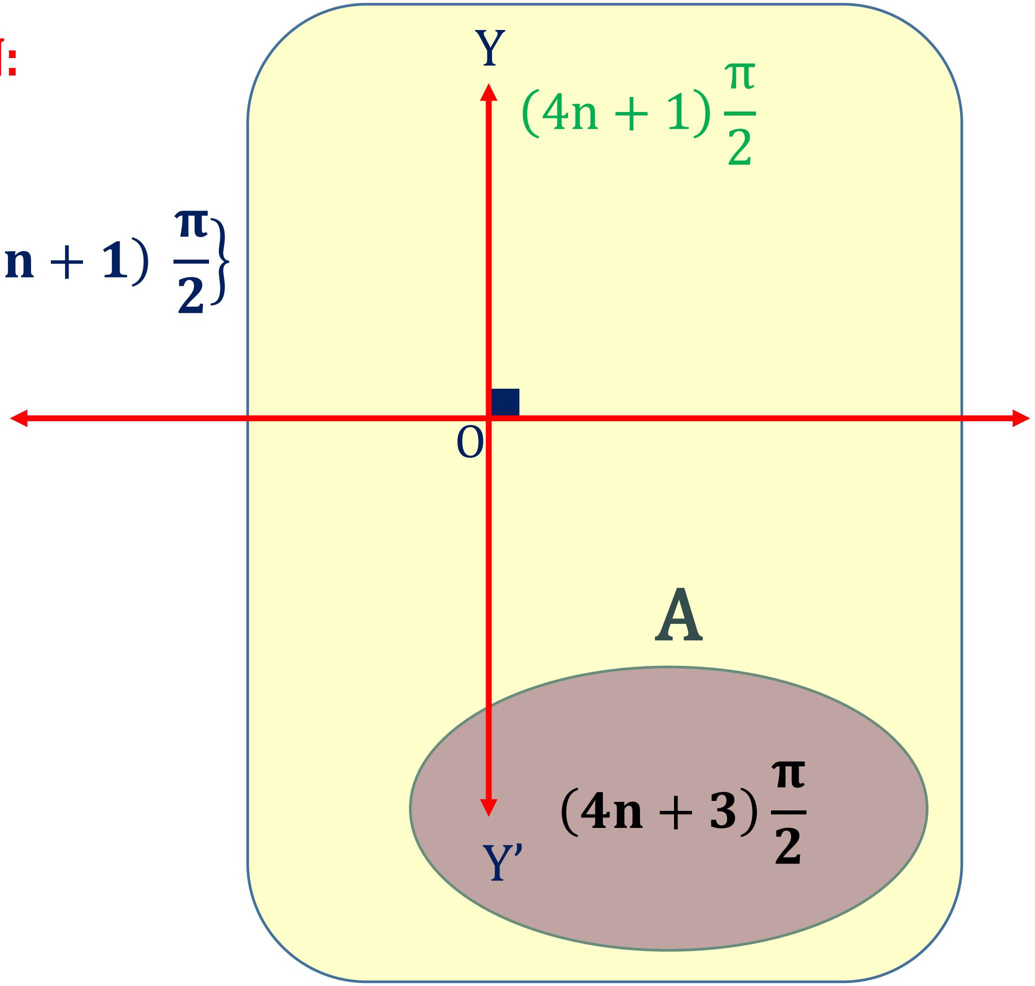
- Si: $\alpha \in IC \leftrightarrow 2n\pi < \alpha < \frac{(4n+1)\pi}{2}$
- Si: $\alpha \in IIC \leftrightarrow \frac{(4n+1)\pi}{2} < \alpha < (2n+1)\pi$
- Si: $\alpha \in IIIC \leftrightarrow (2n+1)\pi < \alpha < \frac{(4n+3)\pi}{2}$
- Si: $\alpha \in IVC \leftrightarrow \frac{(4n+3)\pi}{2} < \alpha < 2(n+1)\pi$

Ejemplo:

Sea A el conjunto de ángulos cuadrantales cuyo lado final pertenece a $\overrightarrow{OY'}$ y B el conjunto de ángulos cuadrantales cuyo lado final pertenece al eje de ordenadas, calcular B-A ($n \in \mathbb{Z}$)

RESOLUCIÓN:

$$\mathbf{B = \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}}$$



$$\therefore \mathbf{B - A = \left\{(4n+1)\frac{\pi}{2}\right\}}$$

Ejemplo:

Sea α un ángulo positivo menor de una vuelta perteneciente al IVC, tal que: $\alpha = \left(\frac{\pi}{23} + \frac{2\pi}{23} + \frac{3\pi}{23} + \cdots + \frac{n\pi}{23}\right)$ rad; $n \in \mathbb{Z}$

Calcular la diferencia entre el mayor y menor valor que pueda tomar α.

RESOLUCIÓN:

$$\alpha \in \text{IVC} \longrightarrow \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

$$\alpha = \left(\frac{\pi}{23} + \frac{2\pi}{23} + \frac{3\pi}{23} + \cdots + \frac{n\pi}{23}\right) \text{rad}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{23}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \text{rad} \ \ldots \text{(i)}$$

$$\frac{3\cancel{\pi}}{\cancel{2}} < \frac{\cancel{\pi}}{23} \times \frac{(n)(n+1)}{\cancel{2}} < \frac{4\cancel{\pi}}{\cancel{2}}$$

$$69 < (n)(n+1) < 92$$

$$n_{mín} = 8 \rightarrow 69 < (8)(9) < 92$$

$$n_{máx} = 9 \rightarrow 69 < (9)(10) < 92$$

- Reemplazando en (i):

$$n_{mín} = 8 \longrightarrow \alpha_{mín} = \frac{36\pi}{23}$$

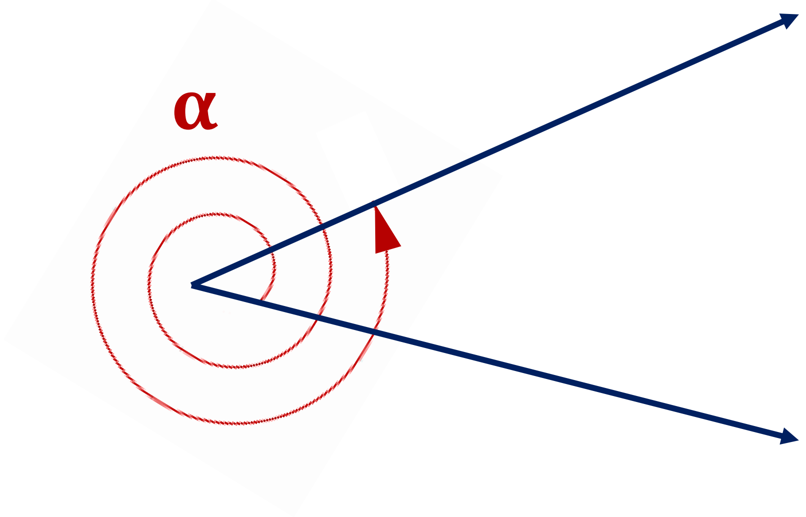
$$n_{máx} = 9 \longrightarrow \alpha_{máx} = \frac{45\pi}{23}$$

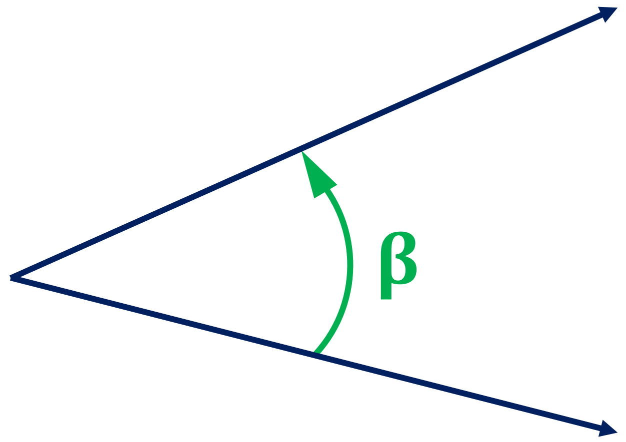
$$\alpha_{máx} - \alpha_{mín} = \frac{45\pi}{23} - \frac{36\pi}{23}$$

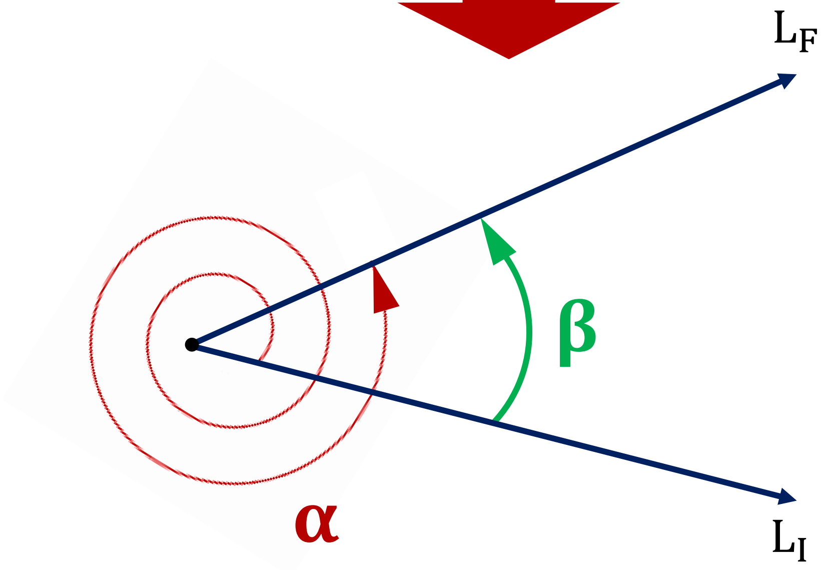
$$\therefore \boldsymbol{\alpha_{máx} - \alpha_{mín} = \frac{9\pi}{23}}$$

RT DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN ESTÁNDAR

3.-Ángulos coterminales:







- $\boldsymbol{\alpha - \beta = \begin{cases} 360n^\circ \\ 2n\pi rad \end{cases} \forall\, n \in \mathbb{Z}}$

- $\mathbf{RT(\alpha) = RT(\beta)}$

Ejemplo:

Dos ángulos coterminales están en la relación de 13 a 1, la diferencia de ellos es mayor que 1 200°, pero menor que 1 500°. Hallar el mayor ángulo

RESOLUCIÓN:

Sea: α y β los ángulos coterminales $\longrightarrow$ $\alpha - \beta = 360n°$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{13}{1} \longrightarrow \alpha = 13k \quad \wedge \quad \beta = 1k$$

$$1200° < \alpha - \beta < 1500° \longrightarrow 1200° < 360n° < 1500°$$

$$360n° = 1440°$$

$$12k = 1440°$$

$$\mathbf{k = 120°}$$

Hallar el mayor ángulo:

$$\alpha = 13(120°)$$

$$\therefore \boldsymbol{\alpha = 1560°}$$

Ejemplo:

Calcular la media aritmética de todos los ángulos positivos coterminales con 230° y menores de 10 000°

RESOLUCIÓN:

$$x - 230° = 360n°\,,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 360n° + 230°$$

$$0 < x < 10000°$$

$$0 < 360n° + 230° < 10000°$$

$$-230° < 360n° < 9770°$$

$$-0{,}63 < n < 27{,}13$$

$$n_{\mathbb{Z}} = \underbrace{0, 1, 2\ \ldots 27}_{\text{28 términos}}$$

$$x = 360(0)° + 230°$$

$$x = 360(1)° + 230°$$

$$x = 360(2)° + 230°$$

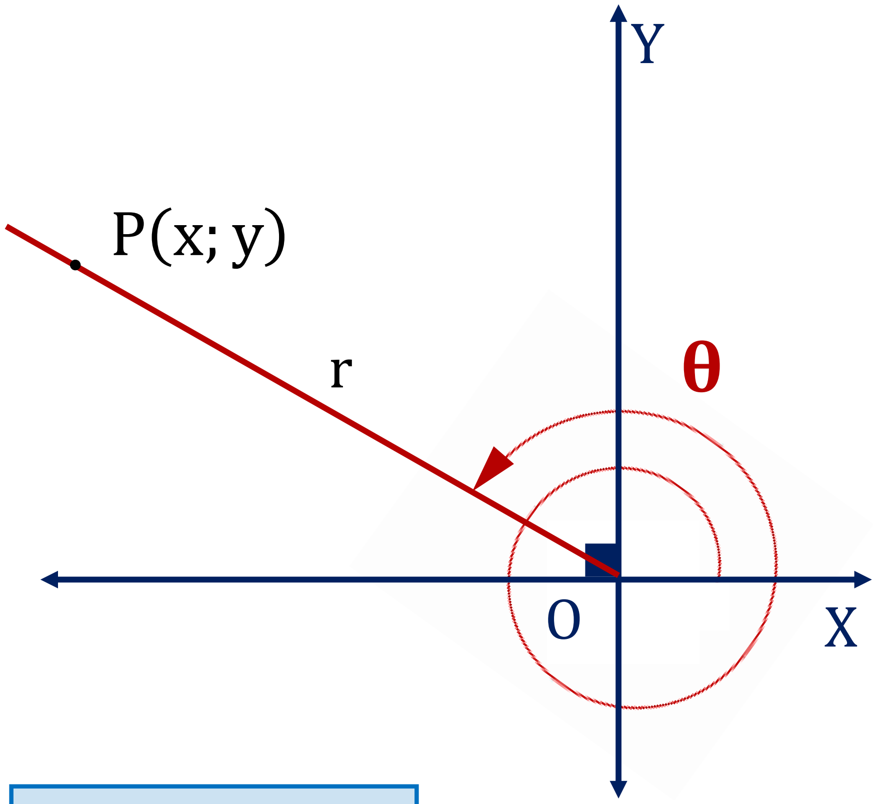
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x = 360(27)° + 230°$$

$$MA = \frac{360° \cdot \dfrac{27(27+1)}{2} + 230° \cdot 28}{28}$$

$$\therefore\ \mathbf{MA = 5090°}$$

4.-Cálculo de las razones trigonométricas:



$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}} \; ; r > 0$$

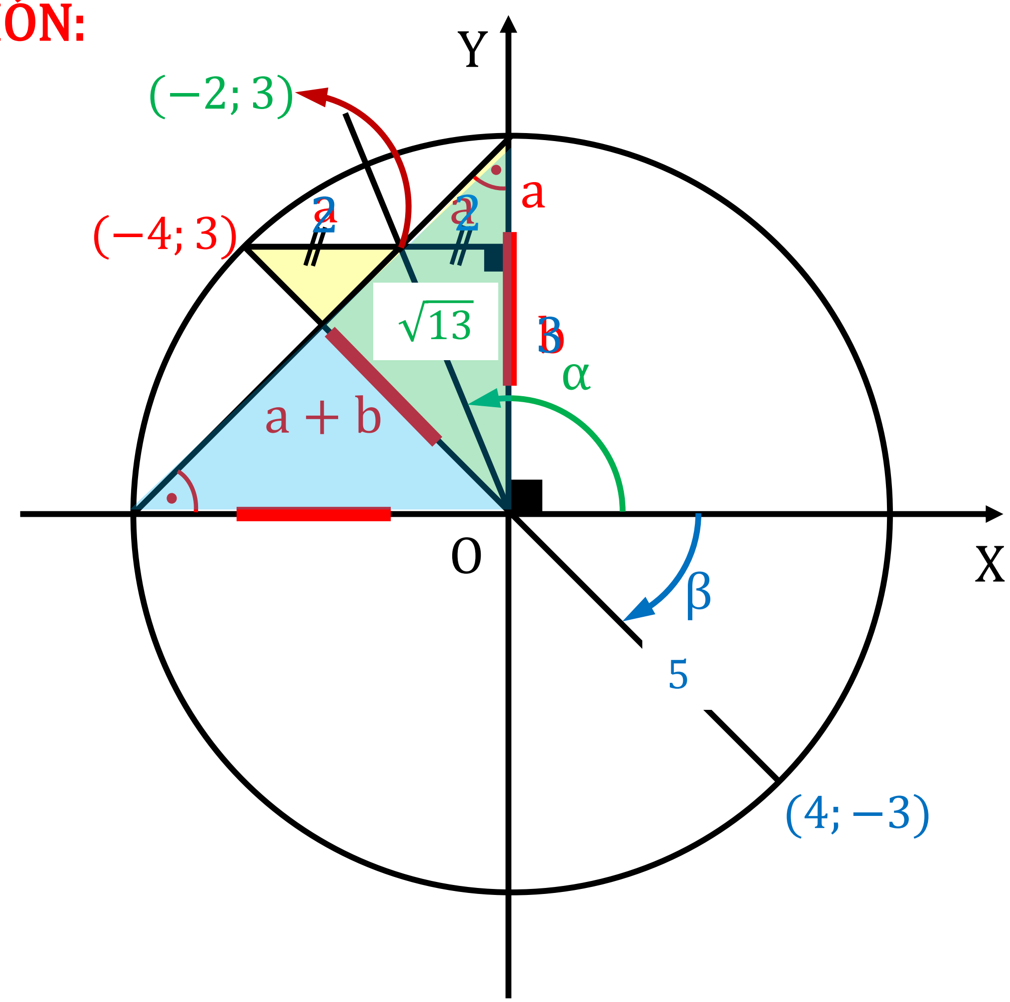
- $x \wedge y \neq 0$

- $\text{Sen}\theta = \dfrac{y}{r}$
- $\text{Csc}\theta = \dfrac{r}{y}$
- $\text{Cos}\theta = \dfrac{x}{r}$
- $\text{Sec}\theta = \dfrac{r}{x}$
- $\text{Tan}\theta = \dfrac{y}{x}$
- $\text{Cot}\theta = \dfrac{x}{y}$

Ejemplo:

Calcular: $\sqrt{13}\text{Cos}\alpha + 10\text{Sen}\beta$

RESOLUCIÓN:



- Por el Teorema de Pitágoras:

$$(a+b)^2 = (2a)^2 + b^2$$

$$a^2 + 2ab + \cancel{b^2} = 4a^2 + \cancel{b^2}$$

$$2\cancel{a}b = 3a^{\cancel{2}}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{a}{b}$$

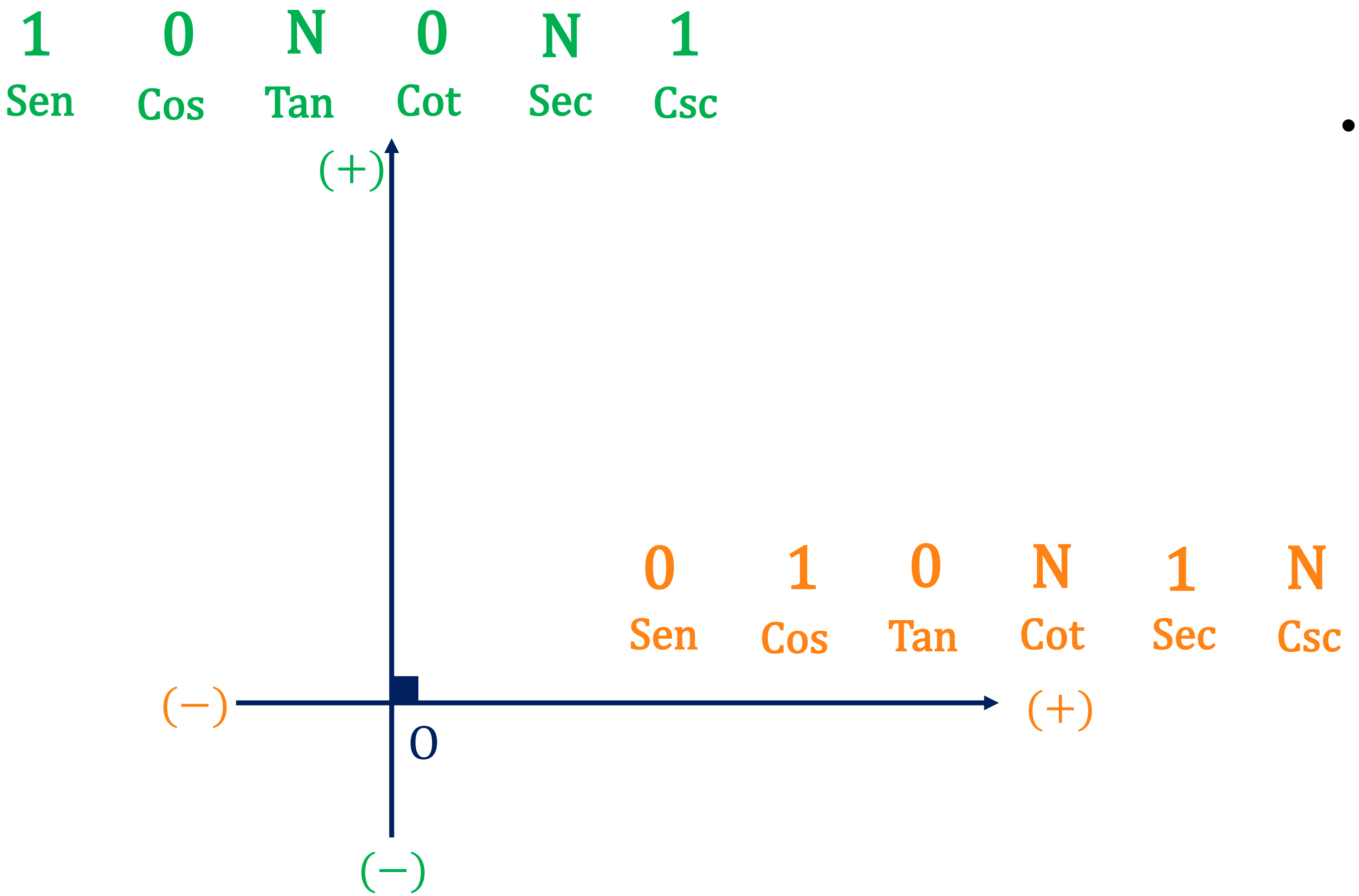
- Calcular: $\sqrt{13}\text{Cos}\alpha + 10\text{Sen}\beta$

$$\cancel{\sqrt{13}}\left(\frac{-2}{\cancel{\sqrt{13}}}\right) + \cancel{10}\left(\frac{-3}{\cancel{5}}\right)$$

$$-2 - 6$$

$$\mathbf{-8}$$

5.-Razones trigonométricas de los ángulos cuadrantales:



- N: no definido

Ejemplo:

Sean α y β ángulos coterminales que están en la relación de 7 a 29, además la suma de ellos se encuentra en el intervalo]720°; 1440°[. Hallar el seno del ángulo mayor multiplicado por $\frac{22}{36}$ sumado del ángulo menor multiplicado por $\frac{11}{18}$.

RESOLUCIÓN:

- $\alpha \wedge \beta$: $\measuredangle_s$ coterminales

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{7\,k}{29\,k} \longrightarrow \beta = 7k \ , \alpha = 29k$$

i. $720° < \alpha + \beta < 1440°$

$$720° < 36k < 1440°$$

$$20° < k < 40° \xrightarrow{x11} 220° < 11k < 440°$$

ii. $\alpha - \beta = 360n°$

$$22k = 360n°$$

$$11k = 180n°$$

$$11k = 360°$$

- $\text{Sen}\left(29k.\frac{22}{36} + 7k.\frac{22}{36}\right)$

$$\text{Sen}\left[\frac{22}{\cancel{36}}(\cancel{36}k)\right]$$

$$\text{Sen}(22k)$$

$$\text{Sen}(720°)$$

0

RT DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN ESTÁNDAR

6.-Signos de las razones trigonométricas:

Sen Csc (+)	Todas (+)
Tan Cot (+)	Cos Sec (+)

RT DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN ESTÁNDAR

Ejemplo:

Determinar el signo de P;Q y R: $P = \text{Sen}\left(\frac{1997\pi}{7}\right)$ $Q = \text{Tan}\left(\frac{1471\pi}{6}\right)$ $R = \text{Cos}\left(\frac{3852\pi}{5}\right)$

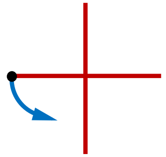
RESOLUCIÓN:

$$P = \text{Sen}\left(\frac{1997\pi}{7}\right)$$

$$P = \text{Sen}\left(285\pi + \frac{2\pi}{7}\right)$$

$$P = (-)$$

$$\begin{array}{r|l} 1997\pi & 7 \\ \cline{2-2} 1995\pi & 285\pi \\ \hline 2\pi & \end{array}$$

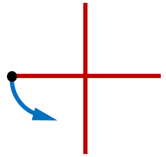


$$Q = \text{Tan}\left(\frac{1471\pi}{6}\right)$$

$$Q = \text{Tan}\left(245\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$Q = (+)$$

$$\begin{array}{r|l} 1471\pi & 6 \\ \cline{2-2} 1470\pi & 245\pi \\ \hline 1\pi & \end{array}$$

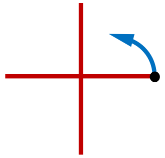


$$R = \text{Cos}\left(\frac{3852\pi}{5}\right)$$

$$R = \text{Cos}\left(770\pi + \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$R = (+)$$

$$\begin{array}{r|l} 3852\pi & 5 \\ \cline{2-2} 3850\pi & 770\pi \\ \hline 2\pi & \end{array}$$



MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

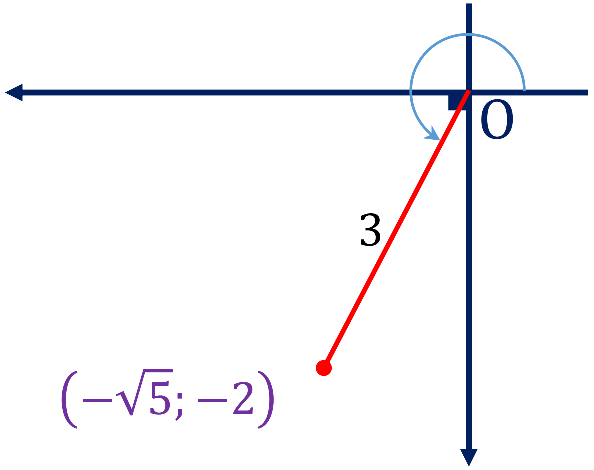
R.T. DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN ESTÁNDAR

1. Si se tiene que : $|\text{Cos}\theta| + \text{Cos}\theta = 0$ y además: $2\text{Cot}\theta = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\sqrt{5}+2}}}$ Calcular el valor de: $S = \sqrt{5}\text{Cos}\theta - 3\text{Sen}^2\theta$

RESOLUCIÓN:

$$2\text{Cot}\theta = \underbrace{2+\underbrace{\cfrac{1}{\underbrace{4+\underbrace{\cfrac{1}{\underbrace{4+\underbrace{\cfrac{1}{\sqrt{5}+2}}_{\sqrt{5}-2}}_{\sqrt{5}+2}}}_{\sqrt{5}-2}}_{\sqrt{5}+2}}}_{\sqrt{5}-2}}_{\sqrt{5}}$$

$$\text{Cot}\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad |\text{Cos}\theta| = -\underbrace{\text{Cos}\theta}_{-}$$



$$S = \sqrt{5}\text{Cos}\theta - 3\text{Sen}^2\theta$$

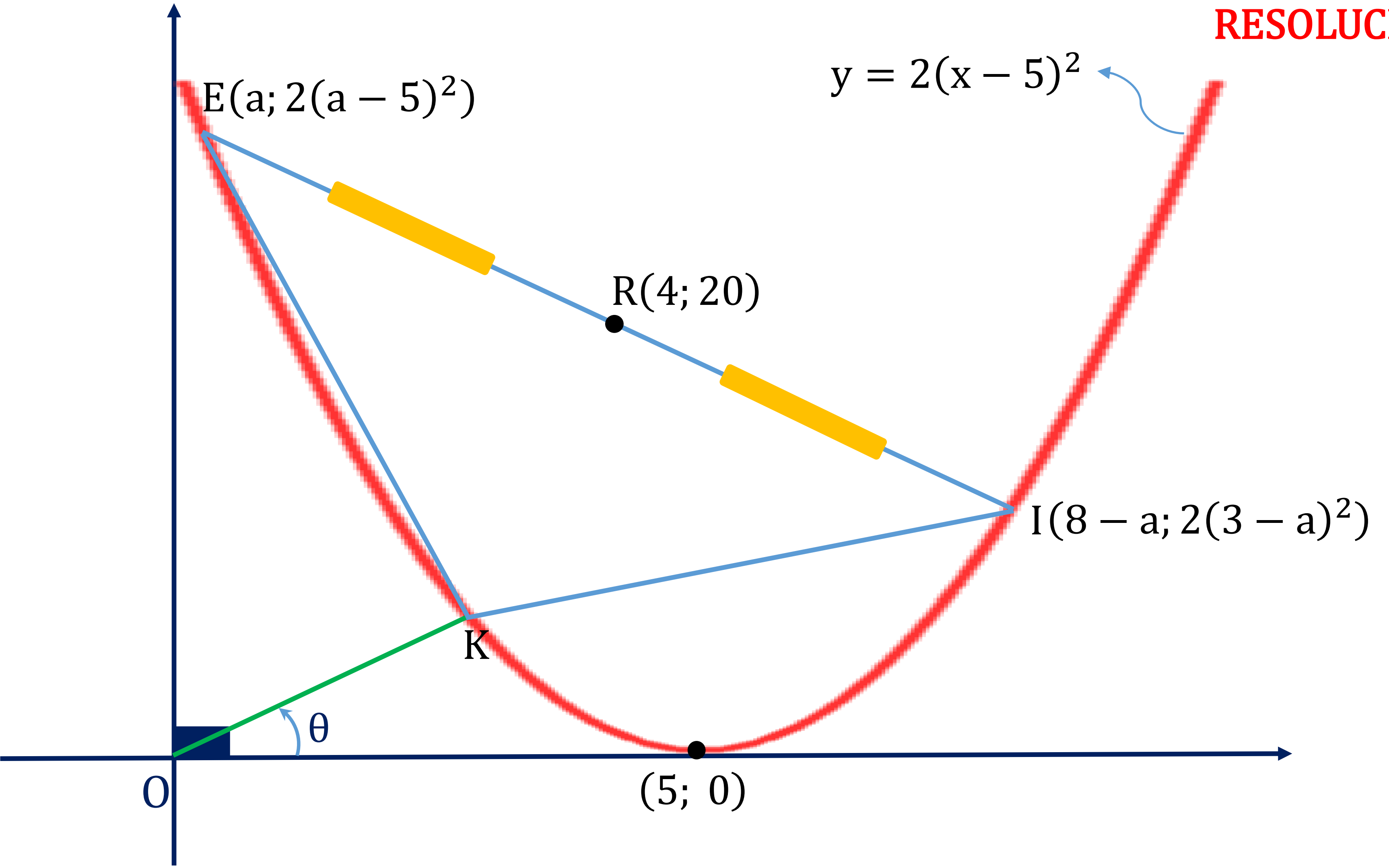
$$S = \sqrt{5}\left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right) - 3\left(\frac{-2}{3}\right)^2$$

$$S = -\frac{5}{3} - \frac{4}{3}$$

$\therefore$ **$S = -3$**

R.T. DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN ESTÁNDAR

2. Del gráfico mostrado, determine el valor de "Tanθ", si se tiene que el área del triángulo EKI es de $54u^2$



RESOLUCIÓN:

$$20 = \frac{2(a-5)^2 + 2(3-a)^2}{2}$$

$$20 = a^2 - 10a + 25 + 9 - 6a + a^2$$

$$a^2 - 8a + 7 = 0$$

$a \quad -7 \qquad a = 7$

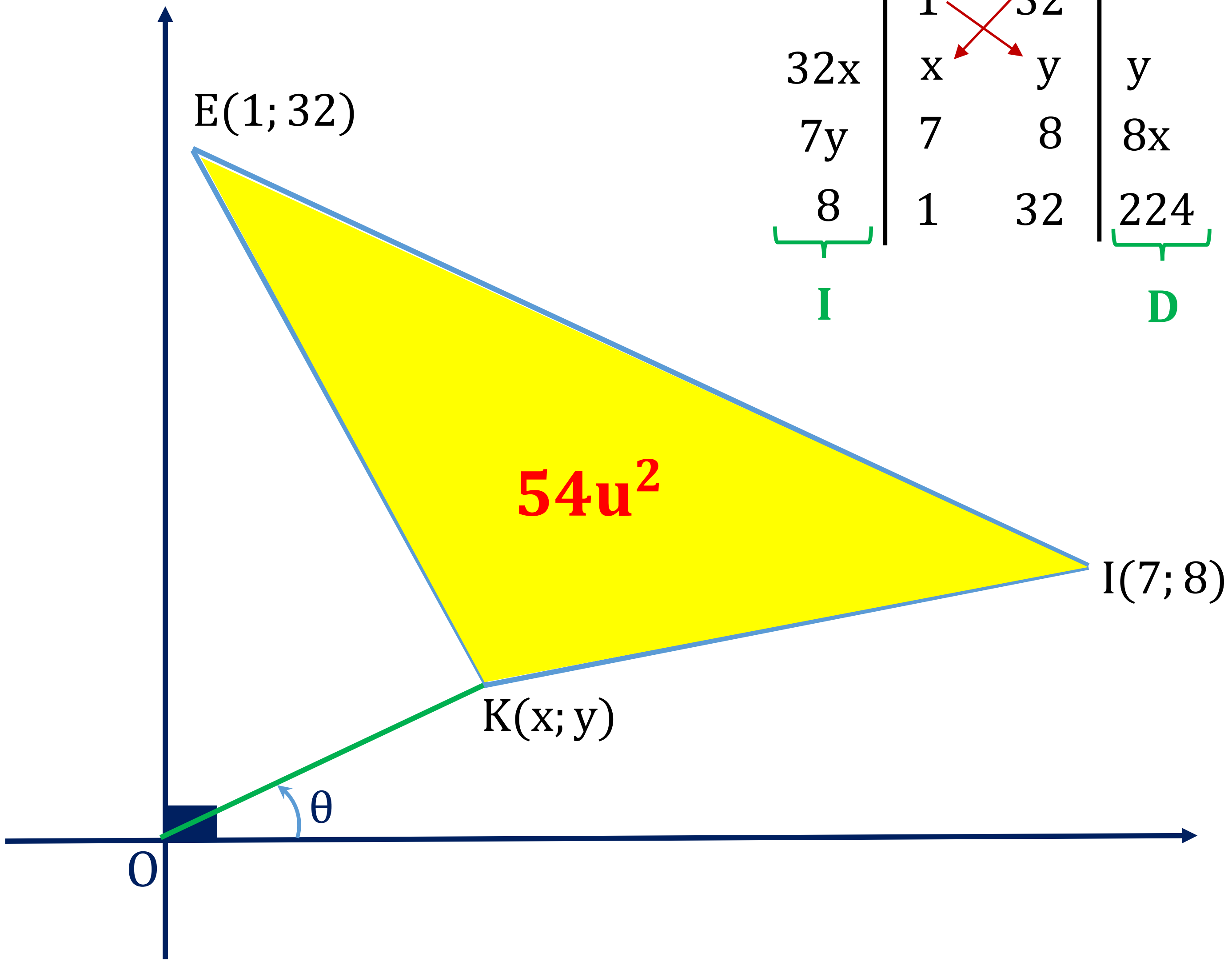
$a \quad -1 \qquad a = 1$

$\rightarrow E(1; 32)$

$\rightarrow I(7; 8)$

$\rightarrow K(x; y) = (x; 2(x-5)^2)$

R.T. DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN ESTÁNDAR



$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & 32 & \\ 32x & x & y & y \\ 7y & 7 & 8 & 8x \\ 8 & 1 & 32 & 224 \\ \text{I} & & & \text{D} \end{array}$$

$$54 = \frac{216 - 24x - 6y}{2}$$

$$54 = 108 - 12x - 3y$$

$$4x + y = 18$$

$$4x + 2(x-5)^2 = 18$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x-4)^2 = 0$$

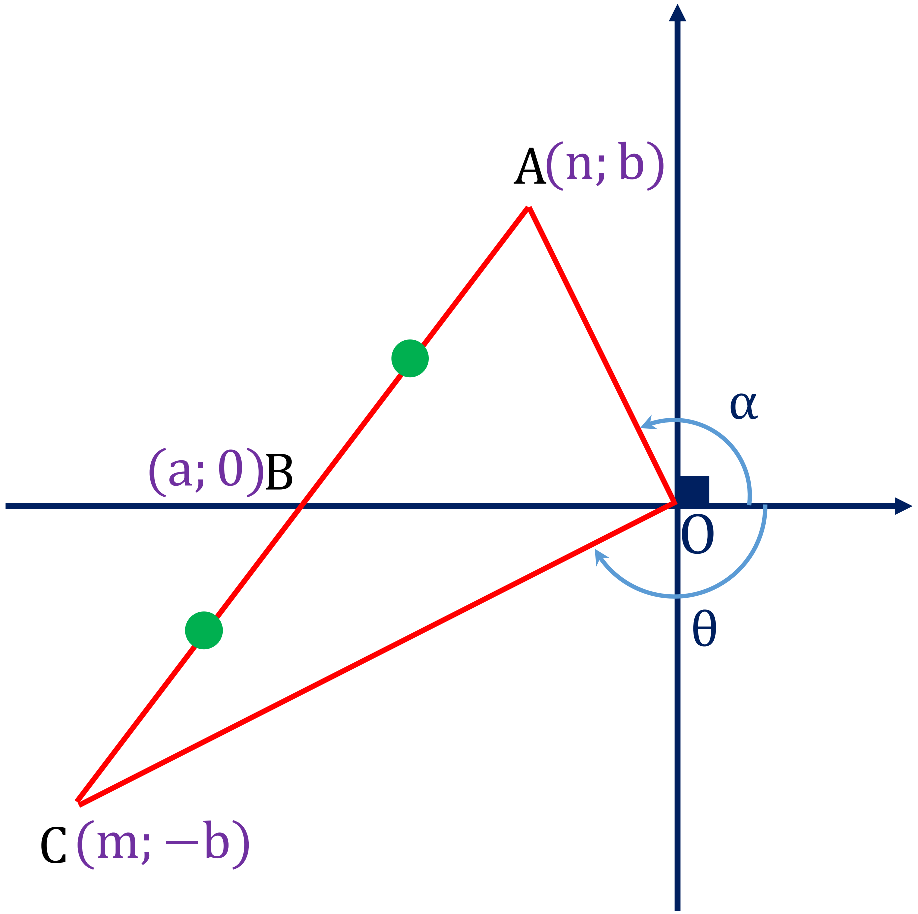
$$x = 4 \rightarrow \ y = 2$$

$$\text{Tan}\theta = \frac{2}{4}$$

$$\therefore \ \mathbf{Tan\theta = \frac{1}{2}}$$

3. Si “a” es la abscisa del punto B y “b” es la ordenada del punto A, además $|a| = 2b$, calcular: $S = \text{Cot}\alpha - \text{Cot}\theta$. Dato: AB = BC.

RESOLUCIÓN:



$$S = \text{Cot}\alpha - \text{Cot}\theta$$

$$S = \frac{n}{b} - \left(\frac{m}{-b}\right)$$

$$S = \frac{n + m}{b}$$

$$S = \frac{2a}{b}$$

$$S = \frac{-4b}{b}$$

$$\therefore \mathbf{S = -4}$$

$$|a| = 2b$$

$$a < 0$$

$$-a = 2b$$

4. El menor de dos ángulos coterminales está comprendido entre 540° y 640°. Calcular el mayor ángulo si se sabe que es el cuádruple del menor.

RESOLUCIÓN:

Sean: α y β los ángulos coterminales $\begin{cases} \alpha > \beta \\ \alpha - \beta = 360n° \rightarrow 4\beta - \beta = 360n° \end{cases}$

$$\beta = 120n°$$

$$\alpha = 4\beta$$

$$540° < \beta < 640° \quad \rightarrow 540° < \underbrace{120n°} < 640°$$

$$\beta = 600°$$

$$\therefore \boldsymbol{\alpha = 2400°}$$

5. Sabiendo que: $a_k = \text{Sen}\left[(2K+1)\frac{\pi}{2}\right] + \text{Cos}\left[(2K+1)\frac{\pi}{2}\right] + \text{Tan}K\pi$ Calcular el valor de: $M = \frac{a_0 + a_2}{a_1 + a_3}$

RESOLUCIÓN:

$$a_k = \underbrace{\text{Sen}\left[(2K+1)\frac{\pi}{2}\right]}_{\pm 1} + \underbrace{\text{Cos}\left[(2K+1)\frac{\pi}{2}\right]}_{0} + \underbrace{\text{Tan}K\pi}_{0}$$

$$a_k = \text{Sen}\left[(2K+1)\frac{\pi}{2}\right] \begin{cases} K = 0 \rightarrow a_0 = 1 \\ K = 1 \rightarrow a_1 = -1 \\ K = 2 \rightarrow a_2 = 1 \\ K = 3 \rightarrow a_3 = -1 \end{cases}$$

$$M = \frac{a_0 + a_2}{a_1 + a_3}$$

$$M = \frac{1 + 1}{-1 - 1}$$

$$\therefore \mathbf{M = -1}$$

R.T. DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN ESTÁNDAR

6. Se tiene que α y θ son positivos y menores que una vuelta, para los cuales se tiene que:

$$\text{Tan}\theta.\sqrt{\text{Tan}\theta - \text{Sen}\alpha} < 0 \qquad\qquad \text{Cos}\alpha.\sqrt{\text{Sen}\theta - \text{Cos}\alpha} > 0$$

Hallar el signo de:

$$S = \frac{\text{Cos}\theta + \text{Tan}\alpha}{\text{Sen}\alpha - \text{Sen}\theta}$$

RESOLUCIÓN:

$$\underbrace{\text{Tan}\theta.}_{-}\underbrace{\sqrt{\text{Tan}\theta - \text{Sen}\alpha}}_{+} < 0$$

$$\text{Tan}\theta - \text{Sen}\alpha > 0$$

$$\text{Tan}\theta > \text{Sen}\alpha$$

$$\text{Sen}\alpha < 0$$

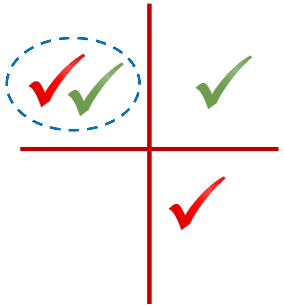
$$\underbrace{\text{Cos}\alpha.}_{+}\underbrace{\sqrt{\text{Sen}\theta - \text{Cos}\alpha}}_{+} > 0$$

$$\text{Sen}\theta - \text{Cos}\alpha > 0$$

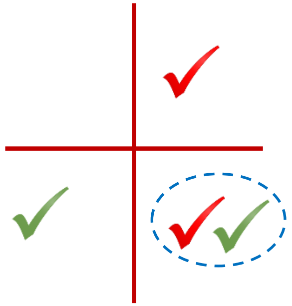
$$\text{Sen}\theta > \text{Cos}\alpha$$

$$\text{Sen}\theta > 0$$

θ:



α:



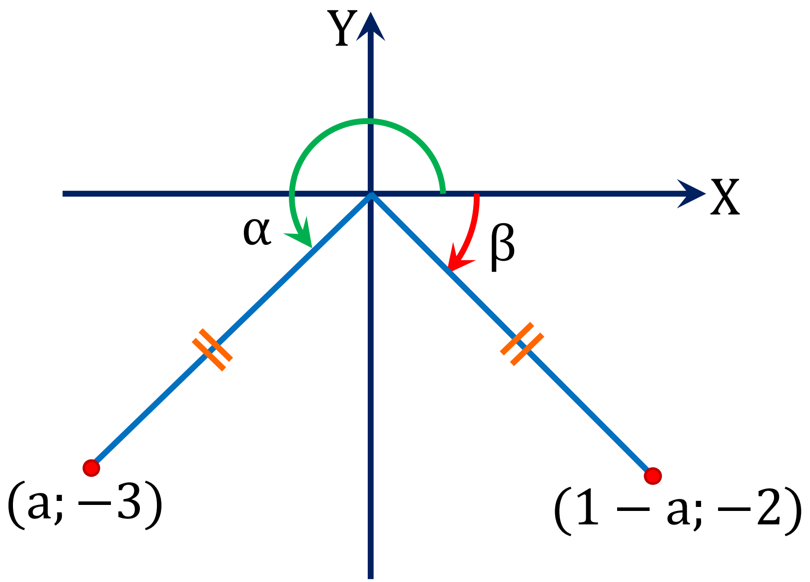
$$S = \frac{\text{Cos}\theta + \text{Tan}\alpha}{\text{Sen}\alpha - \text{Sen}\theta}$$

$$S = \frac{(-) + (-)}{(-) - (+)}$$

$$S = \frac{(-)}{(-)}$$

$$\therefore \mathbf{S} = +$$

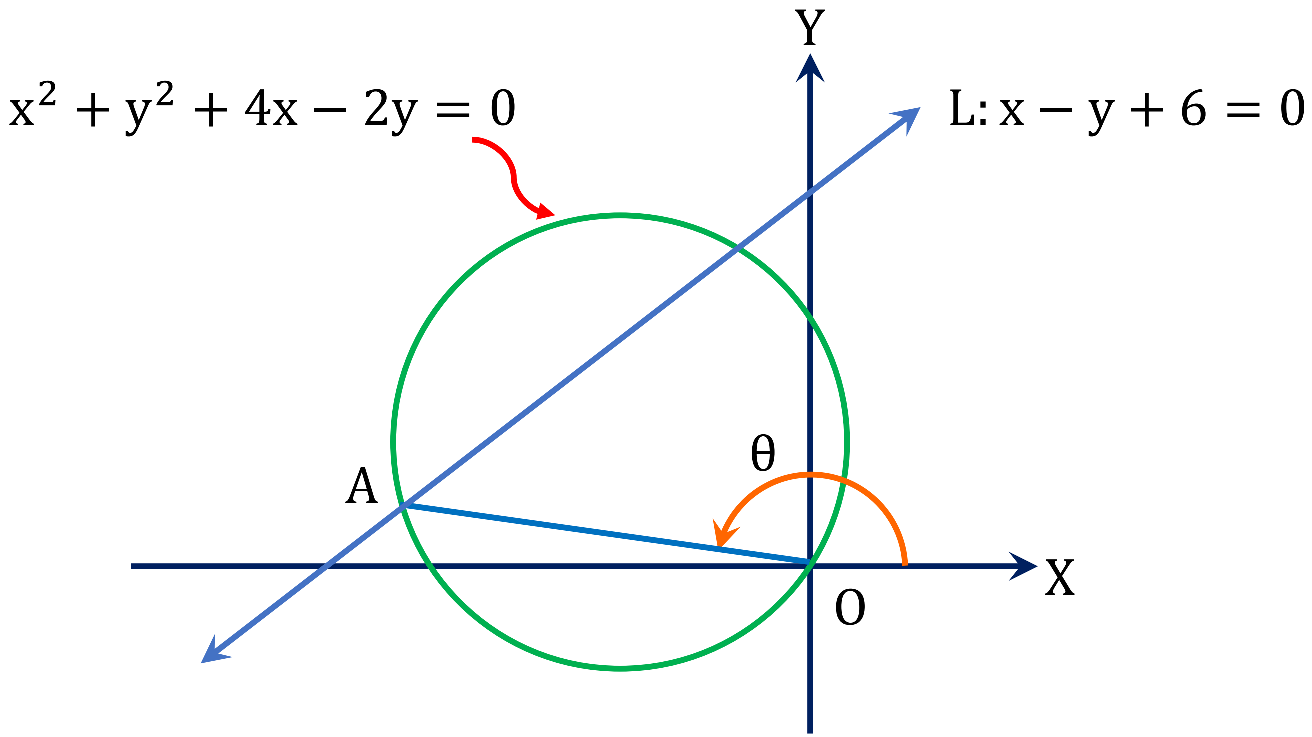
11. Del gráfico mostrado, calcule: $M = 2\text{Tan}\alpha + 3\text{Tan}\beta$



CLAVE: A

R.T. DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN ESTÁNDAR

12. De la figura adjunta calcular: $\text{Tan}\theta - \sqrt{5}\text{Sec}\theta$



CLAVE: A

R.T. DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN ESTÁNDAR

13. Si se cumple que $\text{Sen}x\text{Cos}2\theta = 1$ y además "x" y "θ" son ángulos no negativos y menores que una vuelta; hallar el menor valor de "$x + \theta$"

CLAVE: C

R.T. DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN ESTÁNDAR

14. Si el ángulo x es positivo pertenece al cuarto cuadrante y es tal que $0 < x \leq 2\pi$, entonces hallar el signo de las siguientes expresiones trigonométricas.

$$* \frac{\text{Tan}\left(\frac{x}{4}\right)}{\text{Sen}\left(\frac{x}{2}\right)\text{Csc}\left(\frac{x}{4}\right)} \qquad * \frac{\text{Cot}\left(\frac{x}{3}\right)\text{Sec}\left(\frac{3x}{4}\right)}{\text{Cos}\left(\frac{x}{5}\right)} \qquad * \frac{\text{Sen}\left(\frac{x}{3}\right)\text{Tan}\left(\frac{2x}{3}\right)}{\text{Sec}\left(\frac{3x}{4}\right)}$$

CLAVE: –

15. Se tiene dos ángulos cuadrantales negativos que están en la relación de 3 a 4. Calcular el mayor, si la diferencia de él con el menor es 180°.

CLAVE: B

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

1^{er} CASO: Para ángulos positivos y menores a una vuelta

$\mathrm{RT}(90° + \alpha) \;=\; \pm \;\; \text{CO-RT}(\alpha)$

$\mathrm{RT}(180° \pm \beta) \;=\; \pm \;\; \mathrm{RT}(\beta)$

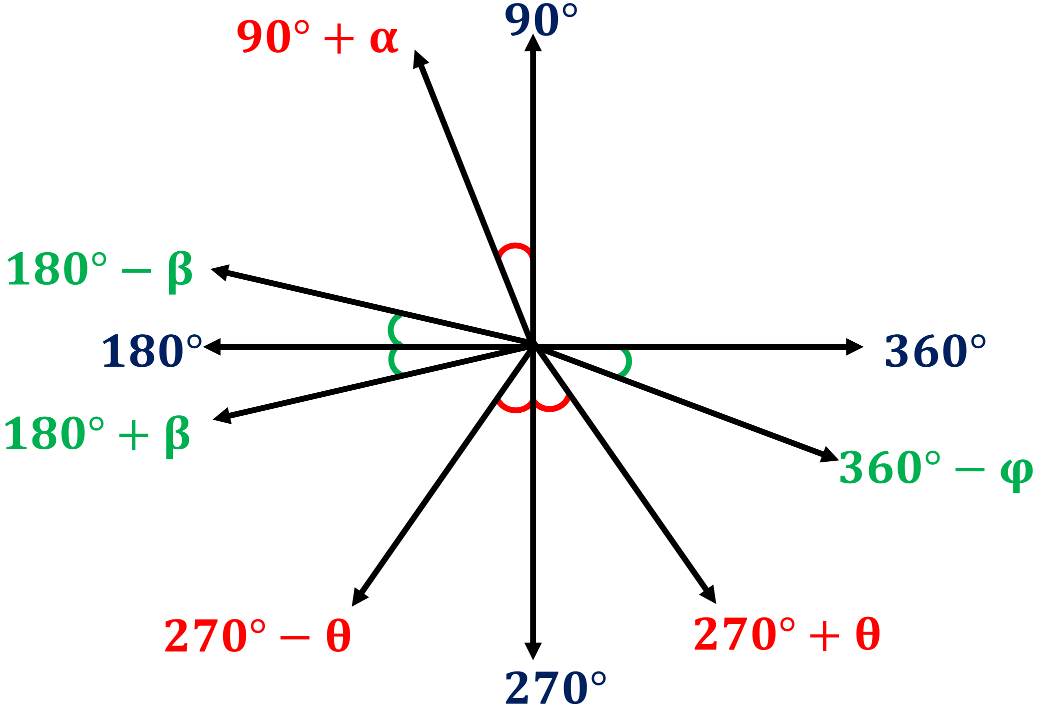
$\mathrm{RT}(270° \pm \theta) \;=\; \pm \;\; \text{CO-RT}(\theta)$

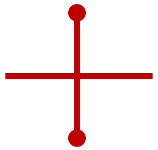
$\mathrm{RT}(360° - \varphi) \;=\; \pm \;\; \mathrm{RT}(\varphi)$

1^{er} paso: Descomponer

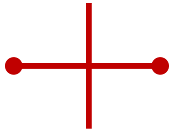
2^{do} paso: Signo

3^{er} paso: ¿Cambia?





SI



NO

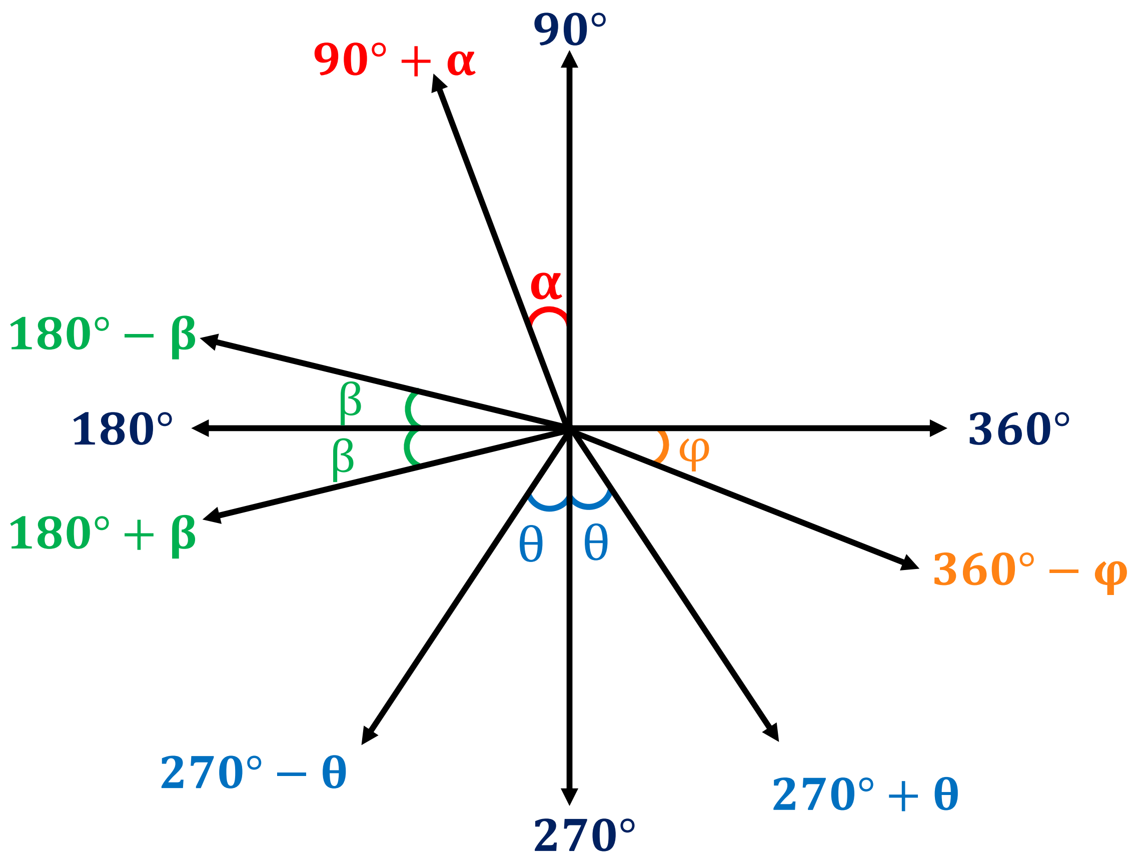
REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

❖ Nota:

a) El signo ($\pm$) dependerá del cuadrante y la RT del ángulo a reducir.

b) Para ubicar el cuadrante consideremos el ángulo a trabajar como (agudo), RT $\left(\frac{n\pi}{2} \pm \theta\right)$ $0 < \theta < 90°$

c) Gráficamente para un ángulo agudo.



Ejemplo:

Calcular : $\text{Sen}135^\circ\text{Csc}225^\circ + \text{Tan}240^\circ\text{Cot}330^\circ$

RESOLUCIÓN:

$$\underbrace{\underbrace{\text{Sen}(180^\circ - 45^\circ)}_{(+\text{Sen}45^\circ)} . \underbrace{\text{Csc}(180^\circ + 45^\circ)}_{\times\ (-\text{Csc}45^\circ)}}_{-1} + \underbrace{\underbrace{\text{Tan}(180^\circ + 60^\circ)}_{(+\text{Tan}60^\circ)} . \underbrace{\text{Cot}(270^\circ + 60^\circ)}_{\times\ (-\text{Tan}60^\circ)}}_{-3}$$

$$-1 + -3$$

$$\mathbf{-4}$$

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

Ejemplo:

Calcular: $$E=\frac{\operatorname{Sec}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\operatorname{Csc}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\operatorname{Tan}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\operatorname{Sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\operatorname{Tan}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$$

RESOLUCIÓN:

$$E=\frac{\operatorname{Sec}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{Csc}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{Tan}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{Sen}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{Cos}\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{Tan}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$E=\frac{\left[\cancel{-}\operatorname{Sec}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\left[\cancel{-}\operatorname{Csc}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\left[\cancel{-}\operatorname{Tan}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]}{\left[+\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[+\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\left[\cancel{-}\operatorname{Tan}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]}$$

$$E=\frac{(2)(2)\left(\sqrt{3}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$\therefore \mathbf{E=24\sqrt{2}}$$

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

❖ Ángulos relacionados:

i. Ángulos Complementarios:

$$\boxed{x + y = 90°}$$

$$\text{Sen}x = \text{Cos}y$$

$$\text{Tan}x = \text{Cot}y$$

$$\text{Sec}x = \text{Csc}y$$

ii. Ángulos Suplementarios:

$$\boxed{x + y = 180°}$$

$$\text{Sen}x = \text{Sen}y$$

$$\text{Cos}x = -\text{Cos}y$$

$$\text{Tan}x = -\text{Tan}y$$

iii. Ángulos Explementarios:

$$\boxed{x + y = 360°}$$

$$\text{Sen}x = -\text{Sen}y$$

$$\text{Cos}x = \text{Cos}y$$

$$\text{Tan}x = -\text{Tan}y$$

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

Ejemplo:

Sabiendo que $A + B = 180°$,calcular: $E = \dfrac{\text{Cos}(A)\text{Cot}\left(\frac{B}{2}\right)}{\text{Tan}\left(\frac{A}{2}\right)\text{Cos}(B)}$

RESOLUCIÓN:

$A + B = 180°$ ⟶ **Suplementarios** $\left[\ \text{CosA} = -\text{CosB}\right.$

$\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} = 90°$ ⟶ **Complementarios** $\left[\ \text{Tan}\left(\dfrac{A}{2}\right) = \text{Cot}\left(\dfrac{B}{2}\right)\right.$

$$E = \frac{(-\text{CosB})\text{Cot}\left(\frac{B}{2}\right)}{\text{Cot}\left(\frac{B}{2}\right)\text{CosB}}$$

$\therefore\ \mathbf{E = -1}$

Ejemplo:

Calcular el valor de: $\mathrm{Sen}^{2n+1}\frac{5\pi}{17}+\mathrm{Sen}^{2n+1}\frac{11\pi}{17}+\mathrm{Sen}^{2n+1}\frac{23\pi}{17}+\mathrm{Sen}^{2n+1}\frac{29\pi}{17}$

RESOLUCIÓN:

$+2\pi$

$$\underbrace{\cancel{\mathrm{Sen}^{2n+1}\frac{5\pi}{17}}+\cancel{\mathrm{Sen}^{2n+1}\frac{11\pi}{17}}+\underbrace{\mathrm{Sen}^{2n+1}\frac{23\pi}{17}}_{\left(\cancel{-\mathrm{Sen}\frac{11\pi}{17}}\right)^{2n+1}}+\underbrace{\mathrm{Sen}^{2n+1}\frac{29\pi}{17}}_{\left(\cancel{-\mathrm{Sen}\frac{5\pi}{17}}\right)^{2n+1}}}_{0}$$

$\measuredangle_s$ Explementarios:

Si: $x+y=2\pi$

$\mathrm{Sen}x=-\mathrm{Sen}y$

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

2^{do} CASO: Para ángulos positivos y mayores a una vuelta

Sea $\beta > 360°$:

$$\boxed{\mathbf{RT(\beta) = RT(\alpha)}}$$

Donde α es el residuo de:

$$\begin{array}{l|l} \beta & 360° \\ \cline{2-2} & \quad q \\ \alpha & \end{array}$$

❖ OBSERVACIÓN:

$$\boxed{\mathbf{RT(\cancel{2n\pi} + \beta) = RT(\beta)}}$$

Ejemplo:

Calcular : $\dfrac{\text{Cos}3660°}{\text{Sen}840°}$

Resolución:

$$\begin{array}{r|l} 3660° & 360° \\ \hline 60° & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 840° & 360° \\ \hline 120° & 2 \end{array}$$

$$\frac{\text{Cos}(\mathbf{60°})}{\text{Sen}(\mathbf{120°})} = \frac{\text{Cos}60°}{\text{Sen}(180° - 60°)} = \frac{\text{Cos}60°}{\text{Sen}60°} = \text{Cot}60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

❖ Conclusión:

- ✓ $\mathbf{RT\{n\pi \pm \alpha\} = \pm RT(\alpha)}$
- ✓ $\mathbf{RT\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \beta\right\} = \pm CO-RT(\beta)}$

Ejemplo:

Calcular el valor de la siguiente expresión: $M = \operatorname{Sen}\left(\frac{245\pi}{6}\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{163\pi}{4}\right)\operatorname{Tan}\left(\frac{77\pi}{3}\right)$

RESOLUCIÓN:

$$\begin{array}{r|l} 245 & 6 \\ \hline -1 & 41 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 163 & 4 \\ \hline -1 & 41 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 77 & 3 \\ \hline -1 & 26 \end{array}$$

$$M = \operatorname{Sen}\left(41\pi - \frac{1\pi}{6}\right)\operatorname{Cos}\left(41\pi - \frac{1\pi}{4}\right)\operatorname{Tan}\left(26\pi - \frac{1\pi}{3}\right)$$

$$M = \left[+\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]\left[-\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[-\operatorname{Tan}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$M = \left[\left(\frac{1}{2}\right)\right]\left[-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]\left[-\left(\sqrt{3}\right)\right]$$

$$\therefore \mathbf{M = \frac{\sqrt{6}}{4}}$$

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

3^{er} CASO: Para ángulos negativos

Sea $x > 0$

$$\mathrm{Sen}(-x) = -\mathrm{Sen}x$$

$$\mathrm{Cos}(-x) = \mathrm{Cos}x$$

$$\mathrm{Tan}(-x) = -\mathrm{Tan}x$$

$$\mathrm{Cot}(-x) = -\mathrm{Cot}x$$

$$\mathrm{Sec}(-x) = \mathrm{Sec}x$$

$$\mathrm{Csc}(-x) = -\mathrm{Csc}x$$

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

Ejemplo:

Simplificar : $E = \dfrac{\text{Sen}(-120°) - \text{Cos}(-210°) + \text{Sec}(-300°)}{\text{Tan}(-135°) + \text{Sec}(-225°) + \text{Sec}(-315°)}$

RESOLUCIÓN:

$$E = \frac{[-\text{Sen}(120°)] - [\text{Cos}(210°)] + [\text{Sec}(300°)]}{[-\text{Tan}(135°)] + [\text{Sec}(225°)] + [\text{Sec}(315°)]}$$

$$E = \frac{[-\text{Sen}(180° - 60°)] - [\text{Cos}(270° - 60°)] + [\text{Sec}(360° - 60°)]}{[-\text{Tan}(180° - 45°)] + [\text{Sec}(180° + 45°)] + [\text{Sec}(360° - 45°)]}$$

$$E = \frac{[\cancel{-(+\text{Sen}60°)}] - [\cancel{-\text{Sen}60°}] + [+\text{Sec}60°]}{[-(-\text{Tan}45°)] + [\cancel{-\text{Sec}45°}] + [\cancel{+\text{Sec}45°}]}$$

$$E = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \mathbf{E = 2}$$

Ejemplo:

Hallar: $B = \dfrac{\text{Sec}(\alpha - 85\pi)\text{Csc}\left(\alpha - \dfrac{39\pi}{2}\right)}{\text{Tan}\left(\alpha - \dfrac{73\pi}{2}\right)\text{Cos}(\alpha - 73\pi)}$; para $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

RESOLUCIÓN:

$$B = \frac{\text{Sec}(85\pi - \alpha)\left[-\text{Csc}\left(\frac{39\pi}{2} - \alpha\right)\right]}{\left[-\text{Tan}\left(\frac{73\pi}{2} - \alpha\right)\right]\text{Cos}(73\pi - \alpha)}$$

$$B = \frac{(-\text{Sec}\alpha)[-(-\text{Sec}\alpha)]}{[-(+\text{Cot}\alpha)](-\text{Cos}\alpha)}$$

$$B = \frac{\left(-\text{Sec}\frac{\pi}{3}\right)\left(\text{Sec}\frac{\pi}{3}\right)}{\left(-\text{Cot}\frac{\pi}{3}\right)\left(-\text{Cos}\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$B = -\frac{(2)(2)}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\therefore\ \mathbf{B = -8\sqrt{3}}$$

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

7. Calcular: $\mathrm{Cos}60° + \mathrm{Cos}600° + \mathrm{Cos}6000° + \cdots + \mathrm{Cos}(6.10^n)°, n \in \mathbb{Z}$

RESOLUCIÓN:

$$S = \mathrm{Cos}60° + \mathrm{Cos}600° + \mathrm{Cos}6000° + \cdots + \mathrm{Cos}(6.10^n)°$$

$$\begin{array}{r|l} 60000 & 360 \\ \hline 2400 & 166 \\ 2400 & \\ \vdots & \end{array}$$

$$S = \mathrm{Cos}60° + \underbrace{\mathrm{Cos}240° + \mathrm{Cos}240° + \cdots + \mathrm{Cos}240°}_{\text{(n-1) términos}}$$

$$\mathrm{Cos}240° = \mathrm{Cos}(180° + 60°)$$

$$\mathrm{Cos}240° = -\mathrm{Cos}60°$$

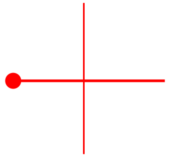
$$\mathrm{Cos}240° = -\frac{1}{2}$$

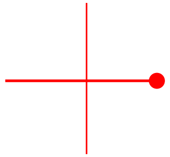
$$S = \frac{1}{2} + (n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \mathbf{S = \frac{2-n}{2}}$$

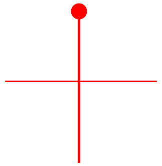
8. Simplificar: $\dfrac{\text{Sen}(405\pi+\alpha)}{\text{Cos}\left(\frac{333\pi}{2}+\alpha\right)}+\dfrac{\text{Cos}(248\pi+\alpha)}{\text{Sen}\left(323\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$

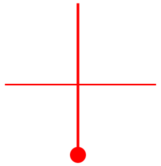
RESOLUCIÓN:





$$A=\frac{\text{Sen}(405\pi+\alpha)}{\text{Cos}\left(\frac{333\pi}{2}+\alpha\right)}+\frac{\text{Cos}(248\pi+\alpha)}{\text{Sen}\left(323\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\quad\rightarrow A=\frac{-\text{Sen}\alpha}{-\text{Sen}\alpha}+\frac{\text{Cos}\alpha}{-\text{Cos}\alpha}$$





$$A=1+(-1)$$

$$\therefore \mathbf{A=0}$$

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

9. Si: $x + y = (4k - 1)\dfrac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ Además: $\text{Cotx} = \dfrac{a-2}{a+1}$ $\text{Coty} = \dfrac{a-4}{a+3}$

Calcular: $W = \dfrac{1 - \text{Sena}\pi + \text{Cosx}}{1 - \text{Cos}\dfrac{\pi}{a} + \text{Seny}}$

RESOLUCIÓN:

$$x + y = (4k + 3)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (4k + 3)\frac{\pi}{2} - y$$

$$\text{Cotx} = \text{Cot}\left[(4k + 3)\frac{\pi}{2} - y\right]$$

$$\text{Cotx} = \text{Tany}$$

$$\frac{a-2}{a+1} = \frac{a+3}{a-4}$$

$$(a-2)(a-4) = (a+3)(a+1)$$

$$a^2 - 6a + 8 = a^2 + 4a + 3$$

$$10a = 5$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$W = \frac{1 - \text{Sen}\frac{\pi}{2} + \text{Cos}\left[(4k + 3)\frac{\pi}{2} - y\right]}{1 - \text{Cos}2\pi + \text{Seny}}$$

$$W = \frac{1 - 1 + (-\text{Seny})}{1 - 1 + \text{Seny}}$$

$\therefore$ $\mathbf{W = -1}$

10. Si se tiene que "α" es un ángulo en posición normal del II cuadrante, mayor que dos vueltas y menor que tres vueltas, tal que:

$$\operatorname{Tan}\alpha = -\operatorname{Cot}\frac{3\pi}{8}$$

RESOLUCIÓN:

$$(4n+1)\frac{\pi}{2} < \alpha < (2n+1)\pi$$

$n = 2$

$$\frac{9\pi}{2} < \alpha < 5\pi \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{9\pi}{2} + x \\ \alpha = 5\pi - y \end{cases}$$

$$\operatorname{Tan}\alpha = -\operatorname{Cot}\frac{3\pi}{8}$$

$$\operatorname{Tan}\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{Cot}\frac{3\pi}{8}$$

$$-\operatorname{Cot}x = -\operatorname{Cot}\frac{3\pi}{8}$$

$$x = \frac{3\pi}{8}$$

$$\therefore \alpha = \frac{39\pi}{8}$$

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

16. Si se tiene que α es un ángulo del segundo cuadrante para el cual se tiene que $\mathrm{Sen}(270° - \alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$

Calcule el valor de:

$$E = \frac{\mathrm{Sen}(180° + \alpha) + \mathrm{Cos}(1170° + \alpha)}{\mathrm{Sen}(990° - \alpha)}$$

CLAVE: A

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

17. Dada la igualdad:

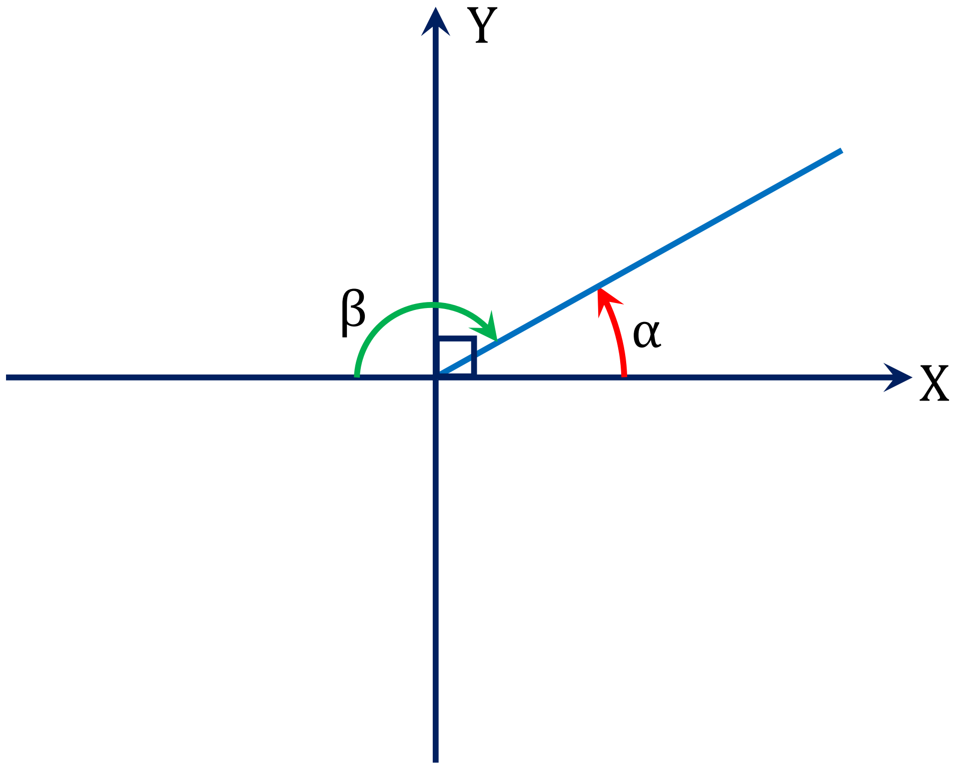
$$\mathrm{Cot}\theta = \frac{\mathrm{Sen}(2\pi - x)}{\mathrm{Cos}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} - \frac{\mathrm{Sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\mathrm{Cos}(4\pi + x)}$$

donde “θ” pertenece al cuarto cuadrante, calcule el valor de: $E = 3 + \sqrt{5}(3\mathrm{Cos}\theta + \mathrm{Sen}\theta)$

CLAVE: D

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

18. Dada la figura mostrada, calcule: $E = \dfrac{3\text{Cos}[(\alpha - \beta)/6] + \text{Cos}\alpha + \text{Cos}\beta}{\sqrt{3}\text{Sen}[(\alpha - \beta)/3] + \text{Sen}\alpha + \text{Sen}\beta}$



CLAVE: E

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

19. Si: $4\text{Sen}\alpha = 3\text{Tan}293°.\text{Cot}247°, \alpha \in]180°; 270°[$

Calcular: $E = \sqrt{7}(\text{Tan}\alpha - \text{Cot}\alpha)$

CLAVE: C

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

20. Calcular el valor de K:

$$\sum_{n=1}^{50} \mathrm{Tan}\left(\frac{n\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{KCot}2\alpha$$

Se conoce: $\mathrm{Cot}\alpha - \mathrm{Tan}\alpha = 2\mathrm{Cot}2\alpha$

CLAVE: A

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS